Ejercicios de Análisis Complejo

Relación 1. Números complejos: módulo y argumento. Raíces complejas

Ejercicio 1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a+ib$.

$$\text{i)}\ (7-2i)(5+3i) \quad \text{ii)}\ (i-1)^3 \quad \text{iii)}\ \overline{(1+i)(2+i)}(3+i) \quad \text{iv)}\ \frac{3+i}{2+i}$$

$$\text{v)}\ \frac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i} \quad \text{vi)}\ (1+i)^{-2} \quad \text{vii)}\ \frac{1+2i}{2-i} \quad \text{viii)}\ i^2(1+i)^3$$

Ejercicio 2. Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

$$\text{a)}\ f_1(z)=\bar{z}^2 \quad \text{b)}\ f_2(z)=z^3 \quad \text{c)}\ f_3(z)=\frac{1}{z} \quad \text{d)}\ f_4(z)=\frac{z+i}{z-i}$$

Ejercicio 3. Calcula las siguientes cantidades.

$$\text{a)}\ |(1+i)(2-i)| \quad \text{b)}\ \left|\frac{4-3i}{2-i\sqrt{5}}\right| \quad \text{c)}\ |(1+i)^{20}| \quad \text{d)}\ |\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)|$$

Ejercicio 4. Calcula los números complejos z tales que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es:

a) Un número real; b) Un número imaginario puro.

Ejercicio 5. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

$$\text{a)}\ -\sqrt{3}-i \quad \text{b)}\ -\sqrt{3}+i \quad \text{c)}\ \frac{3}{\sqrt{3}+i} \quad \text{d)}\ \frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$$

Ejercicio 6. Expresa los siguientes números en la forma $a+ib$:

$$\text{a)}\ (1+i\sqrt{3})^6 \quad \text{b)}\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 \quad \text{c)}\ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6 \quad \text{d)}\ (-\sqrt{3}+i)^{13}$$

Ejercicio 7. Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

Ejercicio 8. Resuelve la ecuación cuadrática $az^2+bz+c=0$ donde a,b,c, son números complejos conocidos y $a\neq 0$.

Ejercicio 9. Demuestra la llamada “igualdad del paralelogramo”:

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2) \quad (z,w\in\mathbb{C})$$

y explica su significado geométrico.

Ejercicio 10. Dados dos números complejos α y β, calcula el mínimo valor para $z \in \mathbb{C}$ de la cantidad $|z-\alpha|^2 + |z-\beta|^2$.

Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

Ejercicio 11. Prueba las desigualdades:

a) $||z|-|w|| \leq |z-w|$

b) $|z+w| \geq \frac{1}{2}(|z|+|w|)\left|\frac{z}{|z|}+\frac{w}{|w|}\right|$

donde z, w son números complejos. Estudia también cuándo se da la igualdad en cada una de dichas desigualdades.

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

Ejercicio 12. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } z^3 = 1+i \quad \text{b) } z^4 = i \quad \text{c) } z^3 = -1+i\sqrt{3} \quad \text{d) } z^8 = 1 \quad \text{e) } z^2 + \sqrt{32}\, i z - 6i = 0$$

Ejercicio 13. Dar condiciones necesarias y suficientes para que los números complejos α y β verifiquen la igualdad $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$.

Ejercicio 14. Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π. Prueba las igualdades

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx &= \operatorname{sen}\left(\tfrac{n+1}{2}x\right)\frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \text{b)} \quad \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\cdots+\operatorname{sen} nx &= \operatorname{sen}\left(\tfrac{n+1}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Sugerencia: Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, calcúlese $A+iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

Ejercicio 15. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre probar que:

a) $\operatorname{sen} 3\varphi = 3 \operatorname{sen}\varphi - 4 \operatorname{sen}^3\varphi$

b) $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$

Ejercicio 16. Representar gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

$$\begin{array}{llll} |z-3| \leq 3; & 2 < |z-i| \leq 3; & |\arg z| < \pi/6; & |z-i|+|z+i| = 4 \\ |z-1| = |z-2i|; & \left|\dfrac{z-i}{z+2i}\right| = 2; & \operatorname{Im}(z^2) > 6; & |z-i| = \operatorname{Im} z + 1 \end{array}$$

Ejercicio 17. Sea $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Prueba que z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Ejercicio 18. Dados dos números complejos distintos $a, b \in \mathbb{C}$, justifica que $\dfrac{z-a}{z-b}$ es real si, y sólo si, z está en la recta que pasa por a y por b; y es real negativo si, y sólo si, z está en el segmento que une a con b.

Ejercicio 19. Sean A, B, C, D números reales tales que $A^2 + B^2 + C^2 > D^2$. Prueba que la ecuación:

$$A(z+\bar{z}) + iB(\bar{z}-z) + C(z\bar{z}-1) + D(z\bar{z}+1) = 0$$

representa, en el caso de que sea $C + D = 0$, una recta en el plano; mientras que si $C + D \neq 0$, representa una circunferencia cuyo centro y radio se calcularán.

Ejercicios de Análisis Complejo

Relación 1. Números complejos: módulo y argumento. Raíces complejas

Ejercicio 1. Calcula la parte real e imaginaria de la función $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$.

Ejercicio 2. Calcula las siguientes cantidades: a) $(-\sqrt{3}+i)^6$ b) $(-1+i)^6$.

Ejercicio 3. Calcula las soluciones de la ecuación $z^4 + (1+i)z^2 + 5i = 0$.

Ejercicio 4. Prueba que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1$ si $|z| < 1$ y $|a| < 1$.

Ejercicio 5. Supuesto que $|z| = 1$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Representa gráficamente el conjunto de números complejos z que verifican la igualdad

$$|z| = \pi + \arg z$$

Estos ejercicios se entregarán resueltos el día 6 de octubre.

Granada, 29 de septiembre de 2003

Ejercicios de Análisis Complejo

Relación 1 (recuperación). Números complejos: módulo y argumento. Raíces complejas

Ejercicio 1. Calcula todas las soluciones de las ecuaciones

$$\text{a) } z^2 = -1 - i \quad \text{b) } z^3 = -8i \quad \text{c) } z^4 = -1$$

Ejercicio 2. Calcula las siguientes cantidades: a) $(-1 + i\sqrt{3})^{11}$ b) $(-1+i)^{16}$.

Ejercicio 3. Calcula las soluciones de la ecuación $z^6 + (3-i)z^3 - 3i = 0$.

Ejercicio 4. Prueba que $||z| - |w|| \leqslant |z - w|$. ¿Cuándo se da la igualdad en la desigualdad anterior?

Ejercicio 5. Sea $z = x + iy$. Supuesto que $|z| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 1 - x + y > 0 \\ -3\pi/4 & \text{si } 1 - x + y < 0 \end{cases}$$

Estos ejercicios se entregarán resueltos el día 17 de octubre.

Granada, 14 de octubre de 2003

Ejercicios de Análisis Complejo

Relación 2. Sucesiones y series de números complejos. Ecuaciones de Cauchy - Riemann

Ejercicio 1. Estudia la convergencia de las sucesiones:

$$\text{i)}\quad z_n = \sqrt[n]{n} + i\,n\,a^n \quad (a\in\mathbb{R}, |a|<1) \qquad \text{ii)}\quad z_n = \frac{2^n}{n} + \frac{i\,n}{2^n} \qquad \text{iii)}\quad z_n = \sqrt[n]{a} + i\,\operatorname{sen}\frac{1}{n} \quad (a>0)$$

$$\text{iv)}\quad z_n = n\,\operatorname{sen}\frac{1}{n} + 5\,i\cos\frac{1}{n} \qquad \text{v)}\quad z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \qquad \text{vi)}\quad z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

Ejercicio 2. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos y para todo $n\in\mathbb{N}$ sea $\varphi_n\in\operatorname{Arg}(z_n)$. Supongamos que $\{\varphi_n\}$ converge a un número φ y $\{|z_n|\}$ converge a un número ρ. Justifica que la sucesión $\{z_n\}$ converge al número $z=\rho(\cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi)$.

Ejercicio 3. Calcula el límite de la sucesión $z_n = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}+i\frac{\pi}{3}}{n}\right)^n$.

Sugerencia: Expresa $z_n = |z_n|(\cos\varphi_n + i\operatorname{sen}\varphi_n)$ y usa el ejercicio anterior.

Ejercicio 4. Calcula el límite de la sucesión $z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n} + i\,\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}\right) - 1\right)$.

Sugerencia: Recuerda que el límite de la sucesión $n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ es bien conocido.

Ejercicio 5. Sea $z\in\mathbb{C}$, con $|z|=1$, $z\neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

Ejercicio 6. Estudia la convergencia de las series:

$$\text{i)}\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(1+i)^n} \qquad \text{ii)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n + i\,\operatorname{sen} n}{n} \qquad \text{iii)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n + i\,\operatorname{sen} n}{n^2}$$

$$\text{iv)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos\frac{\pi}{n} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{n} \qquad \text{v)}\quad \sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} + i\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \qquad \text{vi)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{(i\,n)^n}$$

$$\text{vii)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n}\frac{1}{n} \qquad \text{viii)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\frac{\pi}{n^2} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{n^2}\right) \qquad \text{ix)}\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^n+7}$$

Ejercicio 7. Prueba que si la serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ converge y, para todo $n\in\mathbb{N}$, se verifica que $|\arg(z_n)|<\alpha$, para algún número $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, entonces dicha serie converge absolutamente.

Ejercicio 8. Supón que las series $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} z_n^2$ son convergentes y que $\operatorname{Re}(z_n)\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que $\sum_{n\geqslant 1}|z_n|^2$ es convergente.

Ejercicio 9. Demuestra que si $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ es una función polinómica de grado $n \geqslant 1$, se verifica que $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) = \infty$.

Ejercicio 10. Estudia la derivabilidad de la función $f(x+iy) = x^3 + 3xy^2 + i(y^3 + 3x^2 y)$.

Ejercicio 11. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} \quad \text{si } z = x+iy \neq 0, \quad f(0) = 0$$

Estudia la continuidad y la derivabilidad de f.

Ejercicio 12. Sea Ω un abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sean $\Omega^* = \{z : \bar{z} \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $\forall z \in \Omega^*$. Prueba que f^* es holomorfa en Ω^*.

Ejercicio 13. Escribe las ecuaciones de Cauchy-Riemann para

$$f(z) = U(\rho,\vartheta) + iV(\rho,\vartheta) \quad \text{donde} \quad z = \rho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$

Expresa la derivada de f por medio de las derivadas parciales de U y V.

Ejercicio 14. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que hay números $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a^2+b^2 > 0$, tales que $a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c \quad \forall z \in \Omega$. Prueba que f es constante en Ω.

Ejercicio 15. Encuentra una condición necesaria y suficiente que deben cumplir los números reales a,b,c para que exista una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, verificando que $\operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2$ para todos $x,y \in \mathbb{R}$. Determina, cuando dicha condición se cumpla, todas las funciones enteras f cuya parte real es de la forma indicada.

Ejercicio 16. Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$, $T = (u,v) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una aplicación diferenciable en Ω cuyo determinante jacobiano es distinto de cero en todo punto de Ω. Pruébese que la aplicación T es conforme (es decir, conserva ángulos orientados entre curvas) si, y sólo si, la función $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en Ω.

Ejercicio 17. Sea $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función holomorfa. Prueba que las curvas de nivel $u(x,y) = c$, $v(x,y) = k$ son dos familias de trayectorias ortogonales.

Ejercicios de Análisis Complejo

Relación 2. Sucesiones y series de números complejos. Ecuaciones de Cauchy - Riemann

Ejercicio 1. Calcula el límite de la sucesión $z_n = \left(1 + i\dfrac{\pi}{2n}\right)^n$.

Ejercicio 2. Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Ejercicio 3. Sea $\rho \in \mathbb{R}$ con $|\rho| < 1$ y $\vartheta \in \mathbb{R}$. Calcula los límites $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos(n\vartheta)$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \operatorname{sen}(n\vartheta)$.

Ejercicio 4. Consideremos la función dada para $z \neq 0$ por $f(z) = \dfrac{\bar{z}^2}{z}$, y $f(0) = 0$. ¿En qué puntos verifica f las ecuaciones de Cauchy-Riemann? ¿Es f derivable en $z = 0$?.

Ejercicio 5. Calcula una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Si se exige que sea $f(0) = 0$, entonces dicha función es única.

Estos ejercicios debes entregarlos resueltos el día 14 de octubre.

Granada, 6 de octubre de 2003

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 3. Sucesiones y series de funciones. Series de potencias

Ejercicio 1. Calcula la función límite puntual de la sucesión de funciones $f_n(z) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Sugerencia: Escribe $f_n(z) = \rho_n\big(\cos\varphi_n + i\operatorname{sen}\varphi_n\big)$.

Ejercicio 2. Calcula la función límite puntual de la sucesión de funciones $f_n(z) = n\big(\sqrt[n]{z}-1\big)$. Donde $\sqrt[n]{z}$ indica la raíz n-ésima principal de z.

Ejercicio 3. Estudia la convergencia puntual de las sucesiones de funciones $\{f_n\}$ donde:

$$\text{a) } f_n(z) = \frac{1}{1+z^n} \quad \text{b) } f_n(z) = \frac{z^n}{1+z^n} \quad \text{c)}$$

Ejercicio 4. Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n \qquad (z\neq i)$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

Ejercicio 5. Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\left(\frac{2z-i}{2+iz}\right)^n \qquad (z\neq 2i)$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

Ejercicio 6. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$$

Ejercicio 7. Justifica que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{z+n}$ converge puntualmente en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.

Ejercicio 8. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales decreciente a cero. Para cada número $\delta\in]0,1[$, sea $A_\delta = \{z\in\mathbb{C} : |z|\leq 1,\ |z-1|\geqslant\delta\}$. Justifica que la serie $\sum a_n z^n$ converge uniformemente en A_δ. Deduce que dicha serie converge en todo punto de la circunferencia unidad salvo, eventualmente, en el punto 1.

Ejercicio 9. Si la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}c_n z^n$ converge en un punto z_0 de la frontera del disco de convergencia justifica que

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(rz_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}c_n z_0^n$$

Ejercicio 10. Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{i)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n+3}{5n+6}\right)^n z^n \quad \text{ii)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{n^n}z^n \quad \text{iii)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{2n}}{(1+2i)^n} \quad \text{iv)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{n^2}}{(n-1)!}$$

$$\text{v)}\ \sum_{n\geqslant 0}[3+(-1)^n]^n z^n \quad \text{vi)}\ \sum_{n\geqslant 0}a^{n^2}z^n \quad \text{vii)}\ \sum_{n\geqslant 0}2^n z^{n!} \quad \text{viii)}\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$$

Ejercicio 11. Sabiendo que el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0}c_n z^n$ es R, $0<R<+\infty$, calcular el radio de convergencia de las series:

$$\text{a)}\ \sum_{n\geqslant 0}n^k c_n z^n\ (k\in\mathbb{N},\text{fijo}) \quad \text{b)}\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{c_n}{n!}z^n \quad \text{c)}\ \sum_{n\geqslant 0}a_n^k\ (k\in\mathbb{N},\text{fijo}) \quad \text{d)}\ \sum_{n\geqslant 0}(1+a^n)c_n z^n\ (a\in\mathbb{C},\text{fijo})$$

Ejercicio 12. Los radios de convergencia de las series $\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n$, $\sum_{n\geqslant 0}b_n z^n$ son respectivamente R_1, R_2 con $0<R_1,R_2<+\infty$. ¿Qué se puede decir de los radios de convergencia de las series $\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$ y $\sum_{n\geqslant 0}a_n b_n z^n$?

Ejercicio 13. Estudia el comportamiento en la frontera del disco de convergencia de las series:

$$\text{a)}\ \sum_{n\geqslant 1}z^n \quad \text{b)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n} \quad \text{c)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n^2} \quad \text{d)}\ \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\log n}z^{3n-1} \quad \text{e)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\frac{z^n}{\sqrt{n}}$$

Ejercicio 14. Calcula la suma de las series

$$\text{a)}\ \sum_{n\geqslant 1}n z^n \qquad \text{b)}\ \sum_{n\geqslant 1}n^2 z^n$$

Ejercicio 15. Expresa $\dfrac{1}{z}$ como suma de una serie de potencias centrada en un punto $a\neq 0$ e indica en dónde es válida dicha igualdad.

Ejercicio 16. Expresa $\dfrac{1}{(1-z)^3}$ como suma de una serie de potencias.

Ejercicio 17. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f\in\mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que f' es analítica en Ω. Justifica que también f es analítica en Ω.

Ejercicio 18. Justifica que toda función analítica tiene *localmente* primitivas.

Ejercicio 19. Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ para $z\in D(0,\rho)$ y supongamos que $|a_1|\geqslant\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\rho^{n-1}$. Prueba que f es inyectiva en el disco $D(0,\rho)$.

Deduce que una función análitica en un abierto Ω, cuya derivada no se anula en ningún punto de Ω, es *localmente* inyectiva en Ω. ¿Puede asegurarse que una tal función es inyectiva en Ω?.

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 3. Sucesiones y series de funciones. Series de potencias

Ejercicio 1. Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \qquad (z\neq -1)$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

Ejercicio 2. Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(z-n)^2} \qquad (z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{N})$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

Ejercicio 3. Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{a)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n \qquad \text{b)}\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(2n!)n^{2n}}{2^n n!(3n)!}z^n \qquad \text{c)}\sum_{n\geqslant 0}(n+a^n)z^n$$

Ejercicio 4. Estudia el comportamiento en la frontera del disco de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{z^n}{n}$$

Estos ejercicios debes entregarlos resueltos el día 20 de octubre.

Granada, 14 de octubre de 2003

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación4. Funciones complejas elementales

Ejercicio 1. Expresa los 8 números $\pm 1 \pm i$, $\pm\sqrt{3} \pm i$ en la forma $r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$.

Ejercicio 2. Calcula el módulo y los argumentos principales de los números $1+\mathrm{e}^{i\varphi}$, $1-\mathrm{e}^{i\varphi}$, $-a\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ donde $|\varphi| \leqslant \pi$ y $a>0$.

Ejercicio 3. Calcula $\log z$ y $\operatorname{Log} z$ cuando z es uno de los números siguientes

$$i,\ -i,\ \mathrm{e}^{-3},\ \mathrm{e}^{5i},\ 4,\ -5\,\mathrm{e},\ 1+i$$

Ejercicio 4. Calcula $\log(3i)+\log(-1+i\sqrt{3})$ y $\log\big(3i(-1+i\sqrt{3})\big)$.

Ejercicio 5. Calcula $\log(-1-i)-\log i$ y $\log\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)$.

Ejercicio 6. Calcula

$$[(-4)^i],\ i^{-3i},\ [i^{2/\pi}],\ [i^i],\ 1^{2i},\ 3^{1-i},\ ((-i)^i)^i,\ (1+i)^{1+i}$$

Ejercicio 7. a) Estudia, para $z\in\mathbb{C}^*$ y $n\in\mathbb{N}$, las igualdades:

$$\text{a) } \log(\exp(z))=z;\ b)\ \exp(\log(z))=z;\ c)\ \log\left(\frac{1}{z}\right)=-\log(z);$$

$$d)\ \log(\sqrt[n]{z})=\frac{\log(z)}{n};\ e)\ \log(z^n)=n\log(z).$$

b) Prueba que la función logaritmo establece una biyección entre los conjuntos $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$ y $\Omega=\{z\in\mathbb{C}^* : -\pi<\operatorname{Im}(z)<\pi\}$.

Ejercicio 8. Con una interpretación adecuada de la suma justifica que:

$$\operatorname{Arg}(zw)=\operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(w) \qquad \operatorname{Log}(zw)=\operatorname{Log}(z)+\operatorname{Log}(w)$$

Ejercicio 9. Indica el error en los razonamientos siguientes: $(-z)^2=z^2$; por tanto $2\operatorname{Log}(-z)=2\operatorname{Log}(z)$ y, por consiguiente, $\operatorname{Log}(-z)=\operatorname{Log}(z)$.

Ejercicio 10. Calcula la imagen por la función exponencial de:

i) Una recta paralela a uno de los ejes coordenados.

ii) Una banda horizontal de anchura menor que 2π.

iii) Un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados.

iv) El conjunto $\{z\in\mathbb{C} : |z|>r\}$.

Ejercicio 11. ¿Tiene la función exponencial límite en infinito? Dado $w\in\mathbb{C}$ con $|w|=1$, estudia la existencia del límite $\lim_{r\to+\infty}\exp(r\,w)$.

Ejercicio 12. Da condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto $[a^b]$ de las potencias de base a y exponente b sea finito.

Ejercicio 13. Dígase qué relación hay entre los conjuntos $[a^{m/n}]$ y $[(a^m)^{1/n}]$, donde $a\in\mathbb{C}^*$, $m,n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. ¿Qué puede afirmarse, en particular, cuando m y n son primos entre sí?.

Ejercicio 14. Estudia, interpretándolas convenientemente cuando sea necesario, las siguientes igualdades:

$$\text{a) } \operatorname{Log}[a^b]=b\operatorname{Log}(a) \quad \text{b) } \log[a^b]=b\operatorname{Log}(a) \quad \text{c) } \log(a^b)=b\log a$$

Ejercicio 15. Sean $\rho>0$, $\alpha<\beta$ tales que $\rho\alpha$, $\rho\beta$, α, $\beta\in[-\pi,\pi]$. Prueba que $z\mapsto z^\rho$ es una biyección de $\Omega_1=\{z\in\mathbb{C}^*:\alpha<\arg z<\beta\}$ sobre $\Omega_2=\{z\in\mathbb{C}^*:\rho\alpha<\arg z<\rho\beta\}$.

Ejercicio 16. Estudia la convergencia puntual de las series de funciones:

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0}\exp(-nz) \quad \text{b) } \sum_{n\geqslant 0}\frac{\operatorname{sen}(nz)}{3^n}$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

Ejercicio 17. Prueba que

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n \quad \forall z\in D(0,1)$$

a) Deduce que para todo $\theta\in]-\pi,\pi[$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos(n\theta)=\log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(n\theta)=\frac{\theta}{2}\,.$$

b) Cambiando z por $-z$, deduce que para todo $\theta\in]0,2\pi[$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}=-\log\left(2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}\,.$$

Sugerencia: Usa el ejercicio 9 de la relación 3.

Ejercicio 18. Consideremos la función f definida por $f(z)=\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1,-1\}$. Prueba que f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq 1\}$ y, en particular, en $D(0,1)$. Prueba también que $f(z)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $\forall z\in D(0,1)$ y aplica este resultado para calcular la suma de las series

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} \ ; \ \sum_{n\geqslant 0}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\theta}{2n+1} \quad (0<\theta<\pi)$$

Ejercicio 19. Justifica que la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(z) = 2z - (1+z)\log(1+z) + (1-z)\log(1-z) \quad (z \neq \pm 1),$$

y $f(1) = 2 - 2\log(2) = -f(-1)$, es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ y, para todo $z \in \overline{D(0,1)}$, se verifica que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)}$. Calcula, en particular, la suma de la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$.

Ejercicio 20. Sean $a \neq b$ dos números complejos distintos. Definimos la función $f(z) = \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{a,b\}$.

a) Justificar que f es una función holomorfa en $\Omega = \mathbb{C}\backslash[a,b]^*$.

c) Si $a = i, b = 1$, calcula la serie de Taylor de f en $z = 0$. Calcula el radio de convergencia de dicha serie e indica dónde su suma es igual a f.

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación4. Funciones complejas elementales

Ejercicio 1. Explica con detalle dónde está el error en las igualdades siguientes:

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

Ejercicio 2. Explica la relación que hay entre los conjuntos $[a^{m/n}]$ y $[(a^m)^{1/n}]$, donde $a \in \mathbb{C}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. ¿Qué puede afirmarse, en particular, cuando m y n son primos entre sí?.

Ejercicio 3. Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 0} \exp(-nz^2)$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

Ejercicio 4. Sea $a \in \mathbb{C}$ y $\{z_n\}$ una sucesión de complejos no nulos tal que $\{|z_n|\} \to +\infty$. Justifica que

$$\left\{ \left(1 + \frac{a}{z_n}\right)^{z_n} \right\} \to \exp(a)\ ; \quad \left\{ z_n \left(a^{\frac{1}{z_n}} - 1\right) \right\} \to \log(a) \quad (a \neq 0)$$

Ejercicio 5. Consideremos la función f definida por $f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$. Prueba que f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ y, en particular, en $D(0,1)$. Prueba también que $f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $\forall z \in D(0,1)$ y aplica este resultado para calcular la suma de las series

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\theta}{2n+1} \quad (0 < \theta < \pi)$$